

# 基于空间栅格法的最大 Lyapunov 指数算法研究

杨爱波, 王 基, 刘树勇, 位秀雷

(海军工程大学船舶与动力学院, 湖北武汉 430033)

**摘 要:** 最大 Lyapunov 指数是判断时间序列是否为混沌的一个重要判据, 但传统方法求解的计算量很大, 所需时间较长, 导致在工程实际应用中受到限制. 本文提出了基于空间栅格法的最大 Lyapunov 指数的改进算法, 该方法将重构后的整个相空间进行分割, 形成多个小空间, 搜索邻近点时只需在其子空间内进行搜索, 可以大大提高搜索速度. 仿真实验表明改进的邻近点搜索方法无论在有噪声情况下还是在无噪声情况下都具有良好的鲁棒性, 可以快速而有效地实现参考点邻域的搜索, 极大的缩短了计算时间, 且易于编程实现, 使混沌信号特征指数的在线提取成为了可能.

**关键词:** 混沌; Lyapunov 指数; 空间栅格法

**中图分类号:** TN710; O415. 5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012)09-1871-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.09.026

## An Algorithm for Computing the Largest Lyapunov Exponent Based on Space Grid Method

YANG Ai-bo, WANG Ji, LIU Shu-yong, WEI Xiu-lei

(College of Naval Architecture and Power, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033, China)

**Abstract:** The largest Lyapunov exponent is an essential criterion to judge whether the time series is chaos or not. However, the traditional methods are complex and time-consuming, which leads to the limitations in engineering application. An improved algorithm based on space grid method for estimating the largest Lyapunov exponent is presented. Firstly, the whole reconstructed phase space is divided into small spaces; then the points locating in these subspaces which are searched when the reference point exists; finally, the characteristic exponent is calculated. Simulation results show that neighborhoods are searched effectively, and the whole calculated time is reduced greatly. In practically, the algorithm is robust to reconstructed parameters, noise and data length, and it is easy to be programmed as well, which make exponents computed of chaos online possible.

**Key words:** chaos; Lyapunov exponent; space grid method

## 1 引言

混沌现象是自然界普遍存在的一种现象, 具有内在的随机性和不可逆性, 跨越了确定论和随机论之间的鸿沟. 混沌在许多领域都有很大的应用价值, 如将混沌理论应用到现代信道编码技术<sup>[1]</sup>、多目标进化算法<sup>[2]</sup>和序列密码体系<sup>[3]</sup>中, 以及数据安全和通信保密等领域<sup>[4-6]</sup>, 都需要对系统进行混沌识别. Lyapunov 指数可以量化最邻近轨道的指数发散速度和估计系统的混沌量, 从整体上反映动力系统的混沌化水平. 1983年, Gregogi 证明在一个系统(非发散)的 Lyapunov 指数谱中, 只要出现正值, 系统将是混沌的. 而实测时间序列内在动力学系统的数学方程式通常难以获得, 因此, 计算实测时间序列的最大 Lyapunov 指数尤为重要. 1985年 Wolf

等人<sup>[7]</sup>首先提出了从时间序列估计 Lyapunov 指数的轨道跟踪法. 1993年 Rosenstein 等人<sup>[8]</sup>基于轨道跟踪法思想, 对 Wolf 方法进行改进, 提出了计算最大 Lyapunov 指数的小数据量法. 小数据量法可以充分利用数据, 应用较为广泛. 但在 Lyapunov 指数的计算过程中, 参考点的邻近点的搜索存在计算量大和效率低下等问题, 限制了特征指数的计算速度. 搜索参考点的邻域时对明显远离参考点的相点可以不必进行计算, 因此, 如果将整个相空间进行分割成许多小空间, 就可以大大提高邻域的搜索速度, 从而提高特征指数的计算速度. 在 N. N. Oiwa<sup>[9]</sup>等人的文章中使用尺寸相同的小空间来覆盖整个吸引子. 本文采用基于空间栅格法的 K-邻域搜索法<sup>[10]</sup>, 改进了高维空间邻近点搜索方式, 有效提高了特征指数的计算速度.

## 2 重构参数的选择

C-C 法<sup>[11]</sup>可以同时估计出嵌入维数和时间延迟,是一种较好的方法,但该方法计算出的嵌入维数偏大,会增加计算量.本文使用平均峰值时间作为时间窗口同时计算重构参数嵌入维数  $m$  和时间延迟  $t$ <sup>[12]</sup>.

假设时间序列为:  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , 应用 Takens 嵌入定理进行相空间重构,

$$X(i) = (x_i, x_{i+t}, \dots, x_{i+(m-1)t}), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

其中  $t$  为时延,  $m$  为嵌入维数,  $M = N - (m-1)t$ . 在确定  $m$  和  $t$  时使用时间窗口  $t_w$ , 根据它们之间的关系式  $t_w = (m-1)t$  可知, 只要确定了其中一个参数, 另一个参数便可求得. 时间窗口  $t_w$  采用时间序列的平均峰值时间来估计.

## 3 基于空间栅格法的邻近点搜索

相空间重构之后, 相点是重构相空间中的散乱点, 求某一参考点的最近邻点的计算是指在整个相空间数据集中找到一个与该点欧氏距离最近的点.

实测数据的  $n$  往往很大, 用传统方法计算数据点的最近邻点必然会很耗时. 本文采用基于空间栅格法的  $k$  个最近邻域的快速搜索算法<sup>[11]</sup>来寻找参考点的最近邻点, 该算法综合考虑了数据集的范围、点的总数及最近点数目.

将相点数据的每个坐标存入一个一维数组中, 得到相点每个坐标的最大值和最小值; 利用公式:

$$L = q * (k * ((x_{1\max} - x_{1\min}) (x_{2\max} - x_{2\min}) \dots (x_{m\max} - x_{m\min})) / M)^{1/m} \quad (2)$$

求得超立方体子空间的边长  $L$ . 其中  $q$  为调节参数, 经验取值为  $0.8 \sim 1.2$ , 用以调节超立方体边长的大小, 为计算方便, 本文中取  $q = 1$ ;  $k$  为要搜索的邻近点个数;  $M = N - (m-1)t$  为相点个数.

超立方体边长  $L$  确定之后, 最小超长方体在各个坐标轴上的分辨率分别为:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lceil (x_{1\max} - x_{1\min}) / L \rceil, \\ L_2 &= \lceil (x_{2\max} - x_{2\min}) / L \rceil, \\ &\dots \\ L_m &= \lceil (x_{m\max} - x_{m\min}) / L \rceil \end{aligned} \quad (3)$$

则超立方体空间结构为  $[x_1] [x_2] \dots [x_m]$ , 其中  $x_1 = 1, \dots, L_1; x_2 = 1, \dots, L_2; \dots; x_m = 1, \dots, L_m$ ; 最后把每个相点归入到相应的超立方体子空间中.

基于空间栅格法来搜索参考点的邻域, 可以将每个参考点的索引转化为栅格(子空间)的索引, 参考点的坐标转化为栅格坐标. 这样, 各个相点的上下左右关

系就可以参考所在栅格的坐标关系, 搜索时只需找到相应的栅格, 然后再由坐标定位, 并限制短暂分离而不必搜索整个相空间, 从而大大提高了计算速度.

由于混沌系统对初始条件的极度敏感性, 应用栅格法搜索邻近点时, 限定  $k$  为最近邻近点个数的最大值, 即如果第一个子空间内邻近点的个数不能达到所要求点的个数, 子空间也不再向外扩展; 同时限制初始距离的最小值以尽可能地避免演化过程中相邻轨道过早出现收敛, 确保计算结果更加准确. 这与空间栅格法在逆向工程里搜索一个点确定的邻近点个数是不同的, 使其更加符合实际应用, 将空间栅格法的应用从三维空间扩展到了高维空间.

## 4 仿真实验

为了证明本算法的有效性与快速性, 我们对几种典型的混沌系统进行仿真研究. 以下以 Lorenz 系统为例, 其动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (4)$$

参数取值  $a = 16.0, r = 45.92, b = 4.0$ ; 初始条件取  $x(0) = y(0) = z(0) = 0.1$ ; 使用 4 阶 Runge-Kutta 法求解方程以获得所需的原始时间序列, 求解时的采样周期为  $\Delta t = 0.01s$ . 在仿真计算时将时间序列前 2000 个暂态点删掉.

### 4.1 有效性验证

以下仿真图为演化图的局部放大, 图中虚线斜率为理论值, 横坐标  $i$  为演化步数, 纵坐标  $y(i)$  为演化距离.

(1) 延迟时间对计算结果的影响. 取数据量  $N = 3000$ , 嵌入维数  $m = 3$ , 邻近点个数  $k = 10$ . 延迟时间  $t = 8:1:12$  时仿真曲线图如图 1 所示, 图(a)、(b)分别为在传统方法和基于栅格法中, 不同的时间延迟对计算结果的影响. 从图中可以看出本计算方法对时间延迟有很好的鲁棒性.

(2) 嵌入维数对计算结果的影响. 取数据量  $N = 3000$ , 时间延迟  $t = 11$ , 邻近点个数  $k = 10$ . 仿真曲线图如图 2 所示, 图(a)、(b)分别为在传统方法和基于栅格法中, 不同的嵌入维数对计算结果的影响. 从图中可以看出本方法对嵌入维数有很好的鲁棒性.

(3) 邻近点个数对计算结果的影响. 取数据量  $N = 3000$ , 嵌入维数  $m = 3$ , 时间延迟  $t = 11$ . 仿真曲线图如下图所示, 图 3(a)为邻近点个数  $k = 1 \sim 5$  的曲线图; 图 3(b)为邻近点个数  $k = 10:10:50$  的曲线图. 从图中可以看出在邻近点个数为  $k = 1$  时计算结果与理论值最接近; 在邻近点个数逐渐增大的过程中, 计算结果也逐渐

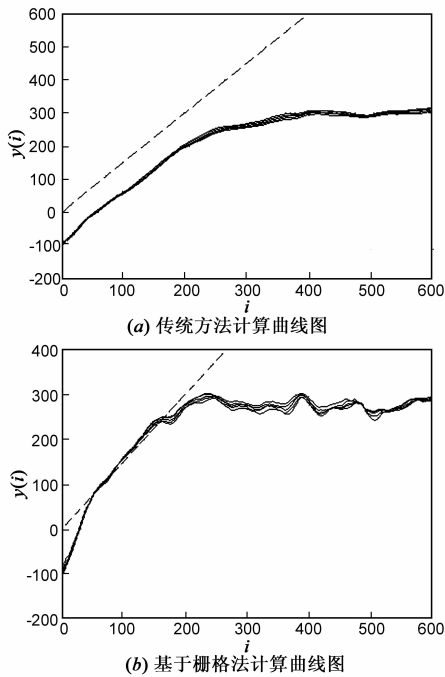


图1 延迟时间对计算结果的影响( $t=8:1:12$ )

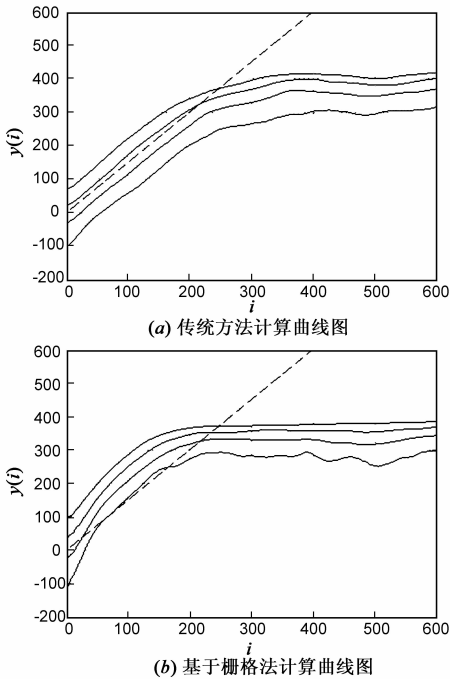


图2 嵌入维数对计算结果的影响( $m=3:3:12$ )

增大,但在  $k = 10 \sim 50$  之间计算结果基本一致,表明本方法对邻近点个数具有很好的鲁棒性.

(4)数据量大小对计算结果的影响.如图 4 所示,取嵌入维数  $m = 3$ ,时间延迟  $t = 11$ ,邻近点个数  $k = 10$ .数据量  $N$  分别为 500,1000,2000,3000,5000 时对计算结果的影响.从图 4(a)中可以看出无噪声影响时在  $N = 500$  时误差最大,且数据量越大计算结果越准确,但当超过  $N = 3000$  时,计算结果变化很小;从图 4(b)中可以看出

在噪声的影响下,本方法计算结果反而更稳定,对数据量  $N$  的鲁棒性更好.这说明本方法可以在求解实测数据的 Lyapunov 指数时不需要很大的数据量即可得到满意的计算结果.

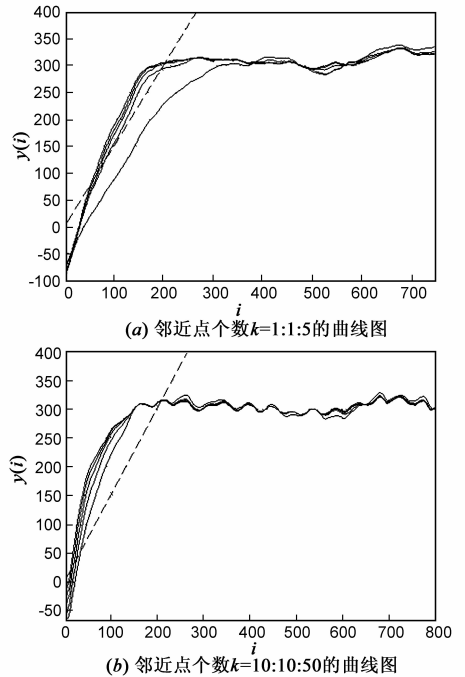


图3 邻近点个数对计算结果的影响

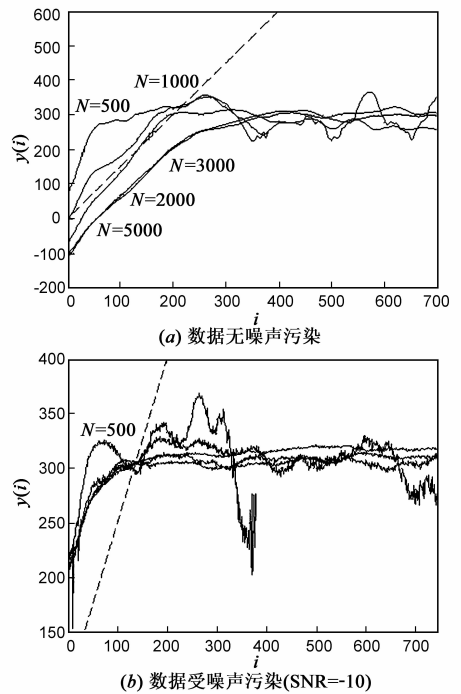


图4 不同数据量对计算结果的影响

(5)噪声对计算结果的影响.取数据量  $N = 3000$ ,嵌入维数  $m = 3$ ,时间延迟  $t = 11$ ,邻近点个数  $k = 10$ .如图 5 所示,带有噪声的时间序列由相应的原始时间序列叠加白噪声构成.图 5(a)是信噪比  $SNR = -50:10:0$  时的

曲线图;图 5(b)是信噪比为  $SNR = 10:10:50$  时的曲线图.从图中可以看出即使当时间序列中噪声水平很高时,本方法依然可以发现时间序列是否具有混沌性,说明本方法对噪声具有很好的鲁棒性.

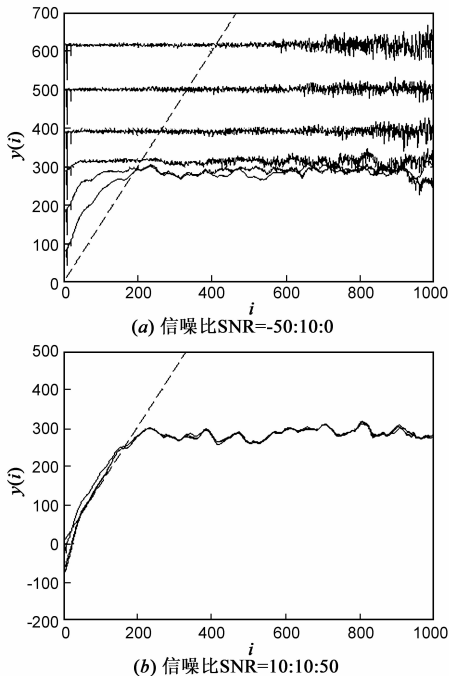


图5 噪声对计算结果的影响

## 4.2 快速性验证

为验证本方法的快速性,对本方法和传统方法在搜索邻近点时间、演化时间和总时间等方面进行对比.对比结果如表 1 所示,其中  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  分别表示搜索时间、演化时间和总时间提高的倍数.计算时取数据量  $N = 3000$ ,时间延迟  $t = 11$ ,邻近点个数  $k = 10$ ,数据无噪声污染.表 1 中数据表明,与常规方法相比,本方法计算量小,同时,  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  有很大的提高,而且计算量越大效果越明显.

表 1 计算用时对比结果

	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 15$	$m = 20$
$P_1$	12.33	14.63	20.00	21.16	17.21	19.37	38.75	50.05
$P_2$	0.98	2.23	4.47	7.17	10.88	21.89	12.05	12.41
$P_3$	3.45	6.99	12.17	15.32	15.40	19.84	23.34	27.48

## 5 结论

针对混沌特征指数计算过程中,相空间轨道上邻近点搜索方法计算量大、效率低的问题,提出应用基于空间栅格法  $k$  邻域的搜索技术.这种方法可以快速有效的搜索混沌吸引子上参考点邻域的选择,从而可以提高计算最大 Lyapunov 指数的速度.仿真实验表明改进的邻近点搜索方法无论在有噪声情况下还是在无噪声情况下本方法都具有良好的鲁棒性,可以快速而有

效地实现参考点邻域的搜索,极大的缩短了计算时间,且易于编程实现,使混沌信号特征指数的在线提取成为了可能.同时,将空间栅格法的应用范围从三维空间扩展到了高维空间.

## 参考文献

- [1] 肖东亮,焦秉立,林春蕾,等.混沌理论在现代信道编码技术中的应用[J].电子学报,2007,35(10):1961-1967.  
XIAO Dong-liang, JIAO Bing-li, LIN Chun-lei, et al. Application study on chaotic theory for modern channel coding[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(10):1961-1967. (in Chinese)
- [2] 雷德明,严新平,吴智铭.多目标混沌进化算法[J].电子学报,2006,34(6):1142-1145.  
LEI De-ming, YAN Xin-ping, WU Zhi-min. Multi-Objective chaotic evolutionary algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(6):1142-1145.
- [3] 李红达,冯登国.复合离散混沌动力系统与序列密码体系[J].电子学报,2003,31(8):1209-1212.  
LI Hong-da, FENG Deng-gu. Composite nonlinear discrete chaotic dynamical systems and stream cipher systems[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(8):1209-1212. (in Chinese)
- [4] Andrew T Parker, Kevin M Short. Reconstructing the keystream from a chaotic encryption scheme[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(5):624-630.
- [5] Alvarez G, Montoya F, Romera M, et al. Breaking two secure communication systems based on chaotic masking[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II, 2004, 51(10):505-506.
- [6] Zhang Han, Wang Xiu Feng, et al. A new image encryption algorithm based on chaos system[A]. International Conference on Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing[C]. Changsha, China: IEEE Press, 2003:778-782.
- [7] A Wolf, J B Swift, H L Swinney, J A Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D, 1985, 16:285-317.
- [8] M T Rosenstein, J J Collins, C J De luca. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets[J]. Physica D, 1993, 65:117-134.
- [9] N N Oiwa, N Fiedler-Ferrara. A fast algorithm for estimating Lyapunov exponents from time series[J]. Physics Letters A, 1998, 246:117-121.
- [10] 熊邦书,何明一,俞华.三维散乱数据的  $k$  个最近邻域快速搜索算法[J].计算机辅助设计与图形学学报,2004, 16(7):909-917.
- [11] H S Kim, R Eykholt, J D Salas. Nonlinear dynamics, delay times, and embedding windows[J]. Physica D, 1999, 127:48-60.
- [12] 杨绍清,章新华,赵长安.一种最大李雅普诺夫指数估计的稳健算法[J].物理学报,2000,49(4):636-640.

## 作者简介



**杨爱波** 男,1987年1月出生于山东省诸城市.硕士.主要研究方向为非线性振动及振动信号处理.

E-mail: yangaibo87@163.com



**王基** 男,1964年6月出生于湖北省武汉市.副教授.主要研究方向为机械动力学.

E-mail: wangji1964@163.com



**刘树勇** 男,1975年11月出生于湖南省望城市.讲师.主要研究方向为非线性振动及振动信号处理.

E-mail: lsydh@sina.com



**位秀雷** 男,1988年10月出生于河南省新乡市.硕士.主要研究方向为非线性振动及振动信号处理.

E-mail: wxlcln@163.com